Integrali Indefiniti

Definizione.

Si dice che la funzione *F(x)* è una **primitiva** della funzione *f(x)* nell'intervallo [a; b] se *F(x)* è derivabile in ogni punto di tale intervallo e risulta:

$$F'(x) = f(x)$$

- Se *F(x)* è una primitiva di *f(x)* anche *F(x)+c* è una primitiva infatti:

  $$D(F(x)+c)=F'(x)+0=F'(x)=f(x)$$

- Se *F(x)* e *G(x)* sono due primitive di *f(x)* esse differiscono per una costante infatti: se *G'(x)= f(x) e F'(x) = f(x)* dovrà essere per forza *F'(x) = G'(x)* e quindi *F(x) = G(x)+ c* da ciò segue che una funzione *f(x)* può non avere primitiva in [a; b] ma se ne ha una allora sono infinite. Se *F(x)* è una primitiva di *f(x)* allora tutte e sole le primitive sono date dalla – forma *F(x)+c.*

Definizione.

Si chiama **integrale indefinito** della funzione *f(x)* la totalità delle primitive di *f(x):*

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x)+c}$$

Esempi

Integrali immediati:

$$\int \frac{1}{x}dx$$

riconosciamo immediatamente che la nostra $f(x)=\frac{1}{x}$ è la derivata di *lnx* pertanto

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln x + c$$

Oppure

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx$$

riconosciamo immediatamente che la nostra $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ è la derivata di *arctgx* pertanto

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = arctgx + c$$

O anche $\int 1dx$

riconosciamo immediatamente che la nostra $f(x)=1$ è la derivata di x e quindi $\int 1dx = x + c$

Oppure ancora:

$$\int xdx,$$

la $f(x)=x$ "assomiglia" tanto alla derivata di x^2; per essere precisi la derivata di x^2 è 2x quindi per avere un integrale immediato possiamo moltiplicare e dividere la nostra f(x) per 2, avremo:

$$\int xdx = \frac{1}{2}\int 2xdx = \frac{1}{2}x^2 + c$$

Anche $\int x^2 dx$

la $f(x)=x^2$ "assomiglia" tanto alla derivata di x^3; per essere precisi la derivata di x^3 è $3x^2$ quindi per avere un integrale immediato possiamo moltiplicare e dividere la nostra f(x) per 3, avremo:

$$\int x\ dx = \frac{1}{3}\int 3x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + c$$

In generale possiamo scrivere:

$$\boxed{\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c}$$

Pertanto:

$$\int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + c\,;$$

$$\int 2x^9 dx = 2\frac{x^{10}}{10} + c = \frac{x^{10}}{5} + c$$

$$\int x^2\sqrt{x}dx = \int x^{2+1/2}dx = \int x^{5/2}dx = \frac{x^{5/2+1}}{5/2+1} + c = \frac{x^{7/2}}{7/2} + c = \frac{2}{7}x^{7/2} + c$$

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt[7]{x^2}}dx = \int \frac{1}{x^2 x^{2/7}}dx = \int \frac{1}{x^{2+2/7}}dx = \int \frac{1}{x^{16/7}}dx = \int x^{-16/7}dx = \frac{x^{-16/7+1}}{-16/7+1} + c = \frac{x^{-9/7}}{-9/7} + c = \frac{-7}{9\sqrt[7]{x^9}} + c$$

Alcuni esempi di integrali indefiniti riconducibili a quelli immediati:

- Ricordiamo che

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + c$$

e dunque ogni qual volta ci si trova :

$$\boxed{\int \frac{1}{f(x)} f'(x)dx = \ln|f(x)| + c}$$

Esempi

1. $\int \frac{1}{x-2}dx = \int \frac{1}{x-2}\cdot 1dx =$

dove $f(x) = x-2$ e $f'(x) = 1$

Pertanto: $\int \frac{1}{x-2}\cdot 1dx = \ln|x-2| + c$.

2. $\int \frac{1}{3x+5}dx =$

La derivata di $f(x) = 3x+5$ è $f'(x) = 3$, pertanto moltiplicando e dividendo per 3 si ha l'integrale immediato:

$$\int \frac{1}{3x+5}dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{3x+5}\cdot 3dx = \frac{1}{3}\ln|3x+5| + c$$

3. $\int \frac{senx}{\cos x}dx =$

$$\int \frac{senx}{\cos x}dx = \int \frac{1}{\cos x}\cdot senxdx = (-1)\int \frac{1}{\cos x}\cdot(-1)senxdx = (-1)\ln|\cos x| + c$$

4. $\int \frac{dx}{(1+x^2)arctagx} =$

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)arctagx} = \int \frac{1}{arctagx}\cdot\frac{1}{(1+x^2)}dx = \ln|arctagx| + c$$

- Ricordando che:

$$\int senx dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x dx = senx + c$$

e dunque ogni qual volta ci si trova :

$$\int senf(x) \cdot f'(x) dx = -\cos f(x) + c$$

$$\int \cos f(x) \cdot f'(x) dx = senf(x) + c$$

Esempi

1. $\int \frac{sen \ln x}{x} dx = \int sen \ln x \cdot \frac{1}{x} dx = -\cos \ln x + c$

2. $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \int \cos\sqrt{x} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\int \cos\sqrt{x} \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = 2sen\sqrt{x} + c$

Ricordando che:

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tagx + c$$

$$\boxed{\int \frac{1}{\cos^2 f(x)} \cdot f'(x) dx = tagf(x) + c}$$

Esempi

1. $\int \frac{x^2}{\cos^2 x^3} dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{\cos^2 x^3} dx = \frac{1}{3} tagx^3 + c$

2. $\int \frac{1}{x\cos^2 \ln x} dx = \int \frac{1}{\cos^2 \ln x} \cdot \frac{1}{x} dx = tag \ln x + c$

- Ricordiamo che:

$$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$$

$$\boxed{\int f^{\alpha}(x) f'(x) dx = \frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c}$$

Esempi

1. $\int \frac{\ln^4 x}{x} dx = \int \ln^4 x \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{\ln^5 x}{5} + c$

2. $\int 3 \frac{tag^7 x}{\cos^2 x} dx = 3 \int tag^7 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx = 3 \frac{tag^8 x}{8} + c$

- Ricordiamo che:

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\boxed{\int e^{f(x)} f'(x) dx = e^{f(x)} + c}$$

Esempi

1. $\int e^{senx} \cos x dx = e^{senx} + c$

2. $\int \frac{e^{arctagx}}{1+x^2} dx = e^{arctagx} + c$